

MODELIZACIÓN DE PLACAS MULTICAPAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS CON VARIABLES MIXTAS (CINEMÁTICAS Y ESTÁTICAS)

Roberto S. Carnicer - Ing. Civil – Facultad de Ingeniería – Univ. De Belgrano
rcarnicer@freyreasoc.com.ar -

Braian A. Desía – Alumno Ing. Civil –FI – UB – b.desia@hotmail.com

Rodolfo Schwarz – Ing. Civil - FI – UB-rodolfo.schwarz@comunidad.ub.edu.ar

Qian Pan – Alumno Ing. Civil – FI - UB

Resumen

Se presenta una solución mixta para resolver el comportamiento de placas multicapas por aplicación del método de los elementos finitos. El objeto principal es el de considerar cada capa como si fuera una placa aislada, donde la continuidad de los desplazamientos se logra mediante multiplicadores de Lagrange (que representan las variables estáticas). Este procedimiento nos permite trabajar con cualquier modelo para placa simple (de manera de asegurar el adecuado comportamiento de cada capa), y la complejidad del sistema multicapa se evita asegurando la condición de desplazamientos mediante multiplicadores de Lagrange (variables estáticas).

La placa se discretiza por una modelización de elementos finitos basada en un modelo híbrido primario, donde el dominio es dividido por cuadriláteros, tanto para el campo de los desplazamientos como para el de las variables estáticas.

Asimismo se aprovecha el uso de programas de computadoras orientados para matemática, que disponen de funciones internas para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones lineales, obtención de autovalores, etc.

Se ha implementado este elemento híbrido o mixto para placas y se han realizado diversos ejemplos que han sido contrastados exitosamente por resultados obtenidos mediante otros métodos de la bibliografía.

Abstract

It is presented a mixed solution for solving the behavior of multilayer plates by the method of finite elements. The main purpose is to consider each layer as if it were an isolated plate, where the continuity of displacement is achieved by Lagrange multipliers (which represent static variables). This procedure allows us to work with any model for single plate (so as to ensure the proper behavior of each layer) and multilayer system complexity is avoided by ensuring the condition of displacement by the Lagrange multipliers (static variables).

The plate is discretized by a finite element modeling based on a primary hybrid model, where the domain is divided by quadrilaterals, both to the field of displacement and to the static variable.

We also use mathematic oriented computer programs which have internal functions for numerically solving systems of linear equations, eigenvalues, and so on.

This hybrid or mixed element plate was implemented and several examples were calculated that have been verified successfully for results obtained by other literature methods.

1. INTRODUCCIÓN

A partir del método desarrollado por Alliney, Carnicer ^[1] para resolver un sistema de placas múltiples por aplicación del método de los elementos finitos, se ha desarrollado una mejora de dicho modelo mediante la utilización de los teoremas variacionales mixtos. Estos teoremas permiten utilizar tanto variables cinemáticas, como desplazamientos y giros, como variables estáticas, como tensiones.

Al mismo tiempo, la mejora del método busca en su aplicación mediante modelos numéricos, el aprovechamiento de herramientas informáticas para la modelación numérica, como lo son MatLab y su par de código libre, Octave.

Estos programas permiten modelar los sistemas de ecuaciones resultantes y resolverlos con ayuda de funciones incorporadas. En este caso, también se incluyó la utilización de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para sistemas ralos, como el método del gradiente conjugado.

2. TEORÍAS DE PLACAS MINDLIN

Para implementar un modelo de placas múltiples por elementos finitos, se parte del planteo energético de la teoría de Mindlin para placas simples. Esta teoría adopta la hipótesis de que las fibras rectas y normales a la superficie media de la placa se mantienen rectas a la superficie media deformada, pero no normales al plano medio de la misma.

El funcional de energía general para una placa, está dado por:

$$J(u) = \iiint_{\omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) d\omega - \iiint_{\omega} f_j u_j d\omega - \iint_{S^1} p'_j u_j dS^1 - \iint_{S^2} p''_j u_j dS^2 \quad (1)$$

Donde las f_j son las fuerzas por unidad de volumen y las p'_j y p''_j las fuerzas por unidad de superficie, donde S^1 y S^2 son las superficies superior e inferior de la placa, que se asume empotrada en todo el perímetro B. Para obtener la condición estacionaria (mínima) del funcional, se debe plantear la variación del mismo, que resulta:

$$\delta J(u) = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \iiint_{\Omega} f_j v_j d\Omega - \iint_{S^1} p'_j v_j dS^1 - \iint_{S^2} p''_j v_j dS^2 \quad (2)$$

Las condiciones de borde que implícitamente se tienen en cuenta son:

$$\iint_{S^1} \sigma_{3j}(u) n'_3 v_j dS^1 = \iint_{S^1} p'_j v_j dS^1 \quad (3)$$

$$\iint_{S^2} \sigma_{3j}(u) n''_3 v_j dS^2 = \iint_{S^2} p''_j v_j dS^2 \quad (4)$$

con

$$\sigma_{33} = [C_{13} \varepsilon_{11}(u) + C_{23} \varepsilon_{22}(u) + C_{33} \varepsilon_{33}(u)] \quad (5)$$

$$\sigma_{31} = C_{44} \varepsilon_{31}(u) \quad (6)$$

$$\sigma_{32} = C_{55} \varepsilon_{32}(u) \quad (7)$$

donde las C_{ij} son las componentes del tensor constitutivo de cuarto orden para cuerpos sólidos en tres dimensiones.

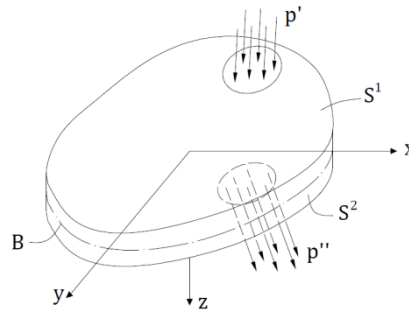


Figura 1: Placa simple bajo cargas externas aplicadas

La hipótesis de Mindlin cinemática de los desplazamientos $u = [U, V, W]$ es la siguiente:

$$U(x, y, z) = u_{0x}(x, y) - z \beta_x(x, y) \quad (8)$$

$$V(x, y, z) = u_{0y}(x, y) - z \beta_y(x, y) \quad (9)$$

$$W(x, y) = w_0(x, y) \quad (10)$$

donde $u = [u_{0x}, u_{0y}, w_0]$ es el campo de desplazamientos del plano medio, mientras que $\beta = [\beta_x, \beta_y]$ es el campo de rotaciones. La variable "z" se evalúa desde la superficie media de la placa.

3. TEORÍAS DE PLACAS MULTICAPAS

La teoría para placas simples, ya sea la de Mindlin o la de Kirchoff, puede ser generalizada para placas múltiples. Cada placa se analiza como única bajo cargas de superficie, de manera que las condiciones naturales de superficie son:

$S_{1,1}$: Superficie superior 1 de la placa 1 (S_I)

$$\iint_{S_{1,1}} \sigma_{3j}(u) n_{1,3} v_j dS_{1,1} = \iint_{S_{1,1}} p_j v_j dS_{1,1} \quad (11)$$

$S_{1,2}$: Superficie inferior 2 de la placa 1 (Interface II - S_{II})

$$\iint_{S_{1,2}} \sigma_{3j}(u) n_{1,3} v_j dS_{1,2} = \iint_{S_{1,2}} q_{j,II} v_j dS_{1,2} \quad (12)$$

donde $q_{j,II}$ es la componente del vector tracción que se transmite de la superficie superior 1 de la placa 2, hacia la superficie inferior 2 de la placa 1 (Interface II).

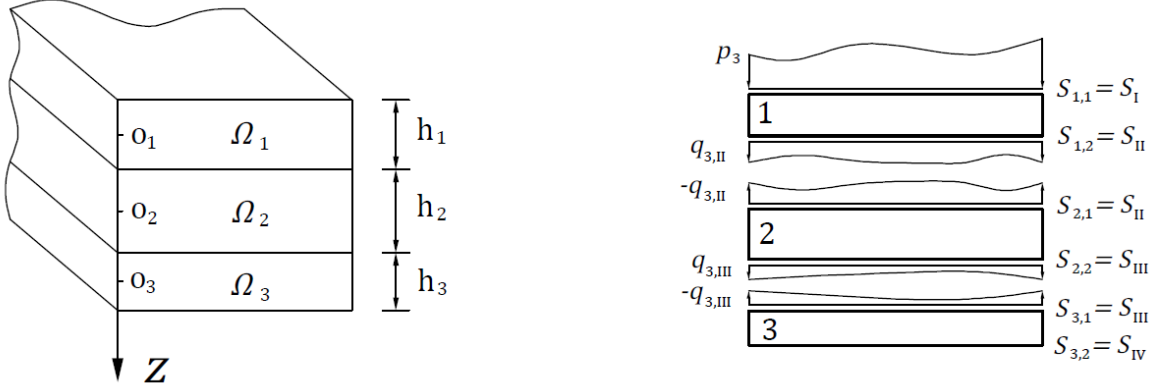


Figura 2: Placa multicapas y fuerzas interlaminares de tracción.

Se procede con una metodología similar para cada placa, y la congruencia entre cada capa se impone en el funcional mediante multiplicadores de Lagrange, que representarán las fuerzas de tracción en las interfaces, que finalmente puede ser expresado como sigue,

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_k \iiint_{\Omega_k} K \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(u) d\Omega_k - \iiint_{\Omega_k} f_{kj} u_{kj} d\Omega_k - \iint_{S_I} p_j u_{ij} dS_I + \iint_{S_{II}} q_{j,II} (u_{1j} - u_{2j}) dS_{II} - \iint_{S_{III}} q_{j,III} (u_{2j} - u_{3j}) dS_{III} \quad (13)$$

4. FORMULACIÓN MATEMÁTICA PARA PLACAS MULTICAPAS MINDLIN

Asumamos una placa multicapas de k capas de alturas h_i . Se define un sistema de coordenadas para cada capa, en su superficie media. Los desplazamientos para una capa genérica i se describen por los desplazamientos en su plano $u_{oi} = [u_{oxi}, u_{oyi}]$ en el plano de referencia, el desplazamiento vertical w (que se considera constante en el espesor de la placa) y dos rotaciones normales $\beta = [\beta_{xi}, \beta_{yi}]$. El vector desplazamiento para cualquier punto para una capa genérica i es,

$$u_i = [u_{xi}(x, y, z), u_{yi}(x, y, z), w_i(x, y)]^T \quad (14)$$

siendo

$$u_{xi}(x, y, z) = u_{oxi}(x, y) - z \beta_{xi}(x, y) \quad (15)$$

$$u_{yi}(x, y, z) = u_{oyi}(x, y) - z \beta_{yi}(x, y) \quad (16)$$

Para asegurar la continuidad de desplazamientos en la interface, se imponen las siguientes restricciones cinemáticas:

1. Los desplazamientos $u_{xi}(x, y, h_i/2)$ y $u_{yi}(x, y, h_i/2)$ en la interface I+1,

$$u_{xi}(x, y, h_i/2) = u_{oxi}(x, y) - \frac{h_i}{2} \beta_{xi}(x, y) \quad (17)$$

$$u_{yi}(x, y, h_i/2) = u_{oyi}(x, y) - \frac{h_i}{2} \beta_{yi}(x, y) \quad (18)$$

deben ser iguales a los desplazamientos $u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2)$ y $u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2)$ en la interface I+1,

$$u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) = u_{oxi+1}(x, y) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{xi+1}(x, y) \quad (19)$$

$$u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) = u_{oyi+1}(x, y) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{yi+1}(x, y) \quad (18)$$

2. Los desplazamientos verticales w_i de la capa i deben ser iguales al desplazamiento vertical w_{i+1} de la capa $i + 1$.

$$w_i = w_{i+1} \quad (20)$$

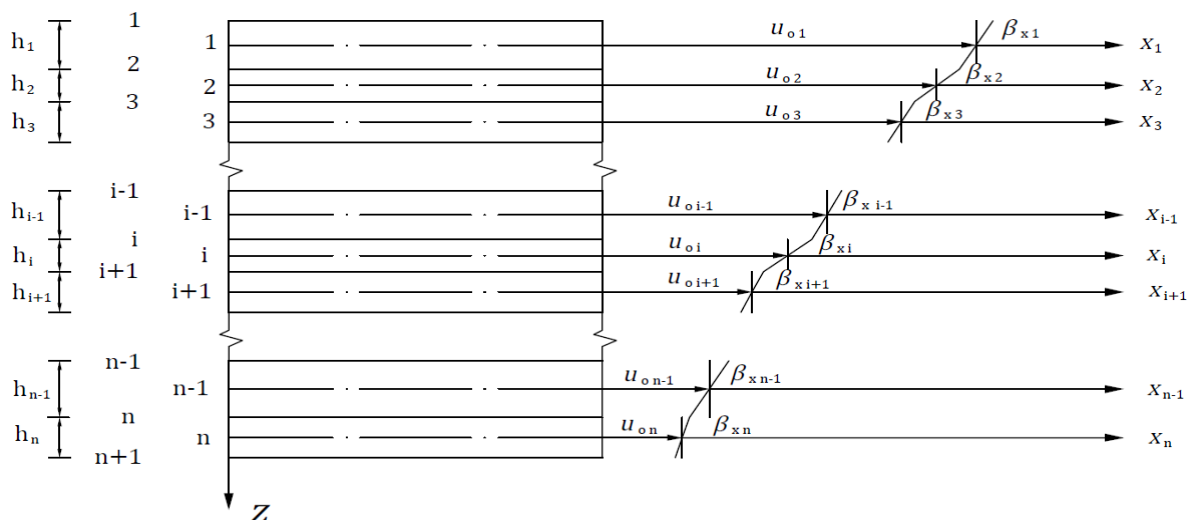


Figura 3: Campo de desplazamientos a lo largo del espesor.

El funcional de Mindlin-Reissner para una capa genérica puede expresarse como sigue:

$$J(u, \beta, w) = \frac{1}{2} h_i a(u_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\beta_i, \beta_i) + \frac{1}{2} h_i b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i) - \iint_{\Omega} p_i w_i d\Omega \quad (21)$$

donde los operadores bilineales $a(u_i, u_i)$ y $a(\beta_i, \beta_i)$ representan la energía potencial por esfuerzos membranales y flexión respectivamente, mientras que $b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i)$, el término de energía de corte.

Al considerar al laminado como un apilamiento de placas simples con continuidad de desplazamientos impuesta matemáticamente mediante multiplicadores de Lagrange, el funcional de la energía potencial total queda definido como,

$$J(u, \beta, w, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i a(u_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\beta_i, \beta_i) + \frac{1}{2} h_i b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i) - \iint_{\Omega} p_i w_i d\Omega \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \iint_{\Omega} \left[\left(u_{oj} - \beta_j \frac{h_j}{2} \right) - \left(u_{oj+1} - \beta_{j+1} \frac{h_{j+1}}{2} \right) \right] \lambda_{j+1} d\Omega + \iint_{\Omega} (w_j - w_{oj+1}) \mu_{j+1} d\Omega \right\} \quad (22)$$

donde $\lambda = [\lambda_x, \lambda_y]$ y μ son multiplicadores de Lagrange que representan las fuerzas tangenciales distribuidas en la superficie actuando en la interface j y la fuerza vertical actuante en j , respectivamente.

5. DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Minimizando el funcional de la energía para una placa genérica "i" se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$\delta u_{oi}: \quad h_i a_i(u_{oi}, \delta u_{oi}) - \int_{\Omega_i} \lambda_i \delta u_{oi} d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \lambda_{i+1} \delta u_{oi} d\Omega_{i+1} = 0 \quad (23)$$

$$\delta \beta_i: \quad \frac{h_i^3}{12} a_i(\beta_i, \delta \beta_i) + h_i b(\nabla w_i - \beta_i, -\delta \beta_i) - \int_{\Omega_i} \frac{h_i}{2} \lambda_i \delta \beta_i d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \frac{h_i}{2} \lambda_{i+1} \delta \beta_i d\Omega_{i+1} = 0 \quad (24)$$

$$\delta w_i: \quad h_i b(\nabla w_i - \beta_i, \delta \nabla w_i) - \int_{\Omega_i} p_i \delta w_i d\Omega_i - \int_{\Omega_i} \mu_i \delta w_i d\Omega_i$$

$$+ \int_{\Omega_{i+1}} \mu_{i+1} \delta w_i d\Omega_{i+1} = 0 \quad (25)$$

$$\delta \lambda_i: \quad \int_{\Omega_i} \left[\left(u_{oi-1} - \beta_{i-1} \frac{h_{i-1}}{2} \right) - \left(u_{oi} + \beta_i \frac{h_i}{2} \right) \right] \delta \lambda_i d\Omega_i = 0 \quad (26)$$

$$\delta \mu_i: \quad \int_{\Omega_i} (w_{i-1} - w_i) \delta w_i d\Omega_i = 0 \quad (27)$$

que se pueden expresar de manera más compacta como sigue,

$$\delta u_{oi}: \quad \delta u_{oi}^T \left[A_i^m u_{oi} - B_i^{(i)} \lambda_i + B_i^{(i+1)} \lambda_{i+1} \right] = 0 \quad (28)$$

$$\delta \beta_i: \quad \delta \beta_i^T \left[A_i^b - E_i w_i + D_i \beta_i - C_i^{(i)} \lambda_i - C_i^{(i+1)} \lambda_{i+1} \right] = 0 \quad (29)$$

$$\delta w_i: \quad \delta w_i^T \left[G_i w_i - E_i^T \beta_i - H_i^{(i)} \mu_i + H_i^{(i+1)} \mu_{i+1} - F_i \right] = 0 \quad (30)$$

$$\delta \lambda_i: \quad \delta \lambda_i^T \left[B_{i-1}^{(i)T} u_{oi-1} - C_{i-1}^{(i)} \beta_{i-1} - B_i^{(i)T} u_{oi} - C_i^{(i)T} \beta_i \right] = 0 \quad (31)$$

$$\delta \mu_i: \quad \delta \mu_i^T \left[H_{i-1}^{(i)T} w_{i-1} - H_i^{(i)T} w_i \right] = 0 \quad (32)$$

Para el caso de tres capas, la representación matricial se presenta en la Fig. 4.

$$Q_{22} \lambda_2 + C_{22} x_2 + Q_{23}^T \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -C_{22}^{-1} Q_{22} \lambda_2 - C_{22}^{-1} Q_{23}^T \lambda_3 \quad (34)$$

$$Q_{33} \lambda_3 + C_{33} x_3 = 0 \quad x_3 = -C_{33}^{-1} Q_{33} \lambda_3 \quad (35)$$

Reemplazando los desplazamientos en las ecuaciones restantes, se obtiene la matriz reducida,

$$\begin{vmatrix} Q_{12} C_{11}^{-1} Q_{12}^T + Q_{22}^T C_{22}^{-1} Q_{22} & Q_{22}^T C_{22}^{-1} Q_{23}^T \\ Q_{23} C_{22}^{-1} Q_{22} & Q_{23} C_{22}^{-1} Q_{23}^T + Q_{33}^T C_{33}^{-1} Q_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{12} C_{11}^{-1} F_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Figura 6: Matriz de rigidez reducida

Luego, los desplazamientos son determinados a partir de las variables estáticas. De este modo, se resuelve fácilmente el “problema mixto”.

Este esquema se repite tanta veces como número de láminas se tenga.

6. EJEMPLOS

Se analizan una serie de ejemplos para analizar el comportamiento de la presente teoría y su formulación por elementos finitos. La solución de la Elasticidad 3D y otros resultados alcanzados por diversos autores son comparados con los valores obtenidos.

Los resultados se presentan adimensionalizados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{100 \cdot E_2 \cdot h^3}{q_0 \cdot a^4} \cdot w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) & ; & \quad \bar{u} = \frac{100 \cdot E_2 \cdot h^2}{q_0 \cdot a^3} \cdot u \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z} \right) \\ \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{h^2}{q_0 \cdot a^2} \cdot \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right) & ; & \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{q_0 \cdot a^2} \cdot \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right) \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{q_0} \cdot \sigma_{zz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) & ; & \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{h^2}{q_0 \cdot a^2} \cdot \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{q_0 \cdot a} \cdot \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) & ; & \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{q_0 \cdot a} \cdot \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

6.1 EJEMPLO 1

El objetivo de este problema es analizar la performance de los valores obtenidos al refinar la malla para diferentes relaciones de espesor y lado (h/a). Los resultados se comparan con los encontrados por otros autores mediante «First order Shear Deformation Theory (FSDT) », «Higher order Shear Deformation Theory

(HSDT) », «Refined HSDT (RHSDT) », «Refined FSDT (RFSDT) » y la solución de la Elasticidad 3D.

Se analiza una placa cuadrada laminada tipo «symmetric three-ply» $(0^\circ/90^\circ)_s^1$ simplemente apoyada en sus cuatro bordes. Se considera una distribución de cargas bi-armónica tal que:

$$q(x, y) = q_o \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$$

Donde “a” representa la longitud en la dirección x , mientras que “b” lo hace en la dirección y .

Las propiedades del material son:

$$\begin{array}{lll} E_1 = 175 \text{ GPa} & G_{12} = 3,5 \text{ GPa} & G_{23} = 1,4 \text{ GPa} \\ E_2 = 7 \text{ GPa} & G_{13} = 3,5 \text{ GPa} & \nu_{12} = 0,25 \end{array}$$

Por la simetría del problema, sólo se modeló un cuarto de la placa. Se emplearon elementos cuadriláteros isoparamétricos de 4 nodos. Las condiciones de borde adoptadas son:

$$\begin{array}{ll} (x, 0): & w = u_o = \beta_x = 0 \\ (0, y): & w = v_o = \beta_y = 0 \\ (x, b/2): & v_o = \beta_y = 0 \\ (a/2, y): & u_o = \beta_x = 0 \end{array}$$

Los resultados se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Deflexión adimensionalizada para una placa cuadrada laminada tipo «symmetric three-ply» $(0^\circ/90^\circ)_s$ simplemente apoyada bajo una carga bi-armónica.

Referencia	Malla	Capas	Teoría	Relación h/a				
				0,25	0,10	0,05	0,02	0,01
Actual	2x2	3		2,0688	0,7500	0,4998	0,4241	0,4130
		6		2,1103	0,7617	0,5032	0,4246	0,4131
		9		2,1304	0,7645	0,5039	0,4248	0,4132
		12		2,1384	0,7655	0,5042	0,4248	0,4133
	4x4	3		1,9910	0,7424	0,5094	0,4395	0,4293
		6		2,0312	0,7534	0,5126	0,4401	0,4295
		9		2,0492	0,7559	0,5133	0,4402	0,4295

¹ El subíndice “s” señala que la secuencia de laminado es simétrica. El supra-rayado indica que dicha lámina se encuentra en el plano de simetría. En este caso particular, se tiene la siguiente secuencia de laminado: $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$.

Referencia	Malla	Capas	Teoría	Relación h/a				
				0,25	0,10	0,05	0,02	0,01
	6x6	12		2,0563	0,7569	0,5135	0,4402	0,4295
		3		1,9776	0,7411	0,5112	0,4423	0,4323
		6		2,0176	0,7521	0,5143	0,4428	0,4324
		9		2,0352	0,7546	0,5150	0,4429	0,4324
		12		2,0422	0,7555	0,5152	0,4430	0,4324
S.K. Singh, A.Chakrabart, P. Bera and J.S.D. Sony [2]	18x18		RHSDT	2,0006	0,7609	0,5206	0,4483	0,4374
Chakrabarti [3]	-		RFSDT	1,893	0,7202	0,5074	0,4446	0,4354
Chakrabarti [4]	-		HSDT	1,923	0,714	0,5052	0,444	0,435
Chakrabarti [4]	-		FSDT	1,777	0,674	0,4932	0,4421	0,435
Reddy [5]	-		HSDT	1,9218	0,7125	-	-	0,4342
Pagano [6]	-		3D Elasticity	2,0059	0,753	0,5164	0,4451	0,4347

Al refinar la malla, la solución por elementos finitos converge a la solución de la elasticidad. Además, se nota que conforme se aumenta la relación espesor/lado, adquiere mayor relevancia la discretización del espesor. Esto se debe a que para grandes relaciones espesor/lado es más pronunciado el efecto de la deformación por corte en comparación para pequeñas relaciones, resultando necesario computar de manera más precisa la energía de deformación por corte.

6.2 EJEMPLO 2

El objetivo de este ejemplo es comparar la deflexión máxima y las tensiones con los resultados obtenidos por Reddy en ^[5] y Pagano-Hatfield en ^[7] para distintas relaciones de espesor y altura (h/a).

Se analiza una placa cuadrada laminada tipo «symmetric four-ply» (0°/90°)_s simplemente apoyada en sus cuatro bordes. Las condiciones de borde adoptadas, las propiedades del material y el estado de carga son idénticos a los del ejemplo anterior.

Por simetría del problema, también se modeló sólo un cuarto de la placa. Se utilizó una malla de 6x6 y el espesor se discretizó en 12 capas de igual espesor $h_k = h/12$ (3 layers por cada lámina) de forma tal de obtener una adecuada distribución de las tensiones tangenciales a fin de prescindir de un factor de corrección de corte. La malla empleada se puede observar en la Fig. 7.

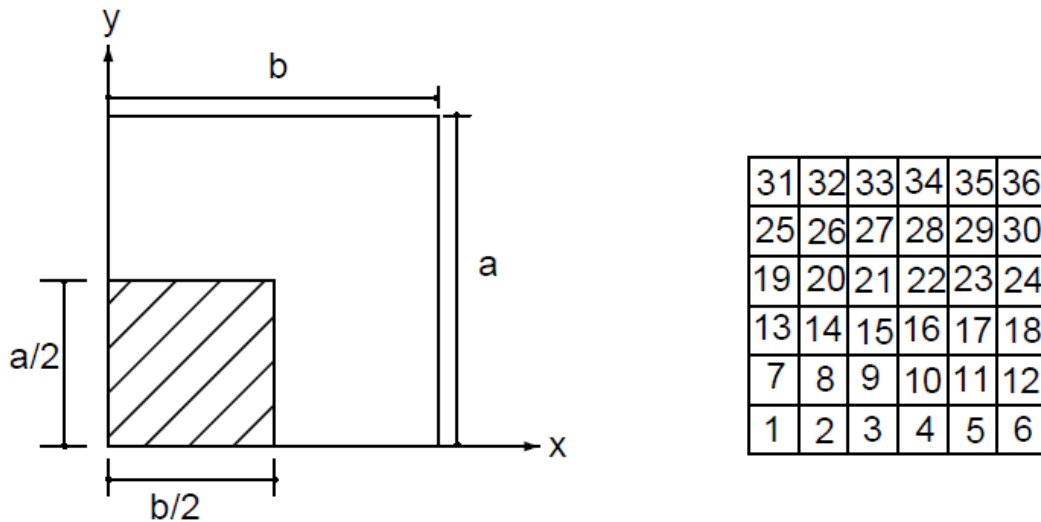


Figura 7: Representación de la placa y la malla empleada.

Los resultados se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Deflexión máxima y tensiones adimensionalizadas para una placa cuadrada simplemente apoyada laminada tipo «symmetric four-ply» $(0^\circ/90^\circ)_s$ bajo una carga bi-armónica.

h/a	Referencia	Teoría	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xy}$
0.25	Actual		1,9707	0,6790	0,6528	0,2148	0,2816	0,0458
	Reddy [5]	HSDT	1,894	0,665	0,632	0,206	0,239	0,0440
		FSDT	1,710	0,406	0,576	0,140	0,196	0,0308
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity	1,954	0,720	0,663	0,219	0,292	0,0467
0.10	Actual		0,7391	0,5438	0,3923	0,2957	0,1874	0,0270
	Reddy [5]	HSDT	0,715	0,546	0,389	0,264	0,153	0,0268
		FSDT	0,663	0,4989	0,361	0,167	0,130	0,0241
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity	0,743	0,559	0,401	0,301	0,196	0,0275
0.05	Actual		0,5117	0,5280	0,3005	0,3222	0,1486	0,0224
	Reddy [5]	HSDT	0,506	0,539	0,304	0,282	0,123	0,0228
		FSDT	0,491	0,527	0,296	0,175	0,109	0,0221
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity	0,517	0,543	0,308	0,328	0,156	0,0230
0.01	Actual		0,4323	0,5238	0,2635	0,3326	0,1322	0,0208
	Reddy [5]	HSDT	0,434	0,539	0,271	0,290	0,112	0,0213
		FSDT	0,434	0,538	0,270	0,178	0,101	0,0213
		CLPT	0,431	0,539	0,269	0,339	0,138	0,0213
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity	0,438	0,539	0,276	0,337	0,141	0,0216

En la Tabla 3 se comparan los valores obtenidos con la solución de la Elasticidad 3D de Pagano-Hatfield.

Tabla 3: Relación entre los resultados obtenidos en el presente trabajo y la solución de la Elasticidad 3D de Pagano-Hatfield.

Relación Actual / 3D Elasticity						
h/a	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xy}$
0,25	1,0085	0,9431	0,9846	0,9821	0,9644	0,9807
0,10	0,9948	0,9728	0,9783	0,9824	0,9561	0,9818
0,05	0,9898	0,9724	0,9757	0,9823	0,9526	0,9739
0,01	0,9870	0,9718	0,9547	0,9869	0,9376	0,9630

En la Fig. 8 se exponen las deflexiones adimensionalizadas para el cuarto de la placa modelado.

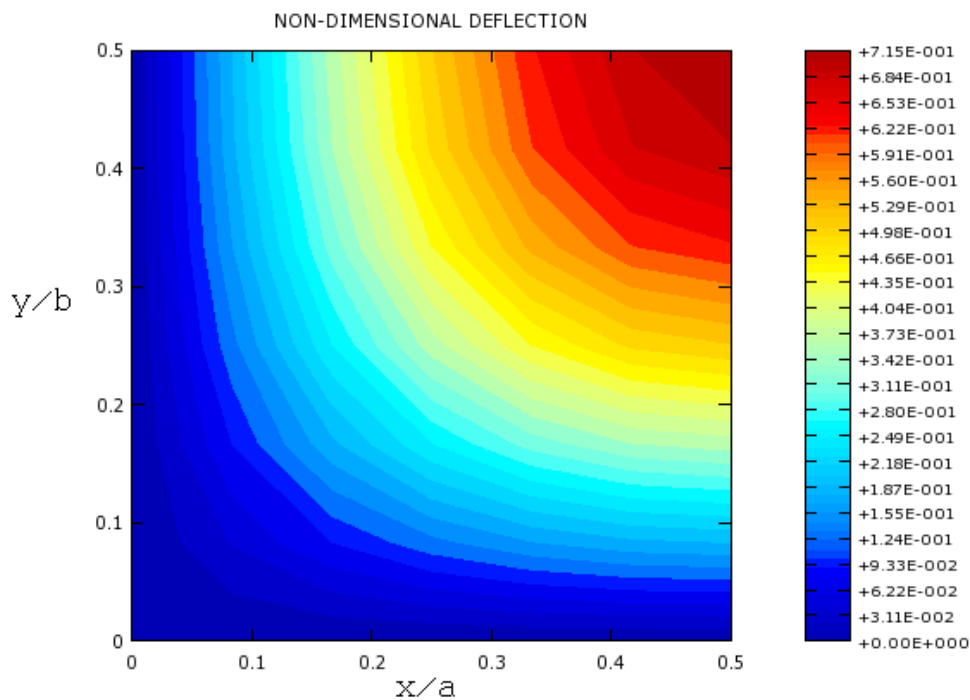


Figura 8: $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$ para $h/a=0,10$.

En la Fig. 9 hasta la Fig. 12 se representan gráficamente la variación de los esfuerzos a lo largo del espesor para una relación $h/a=0.10$. Cabe destacar que las tensiones establecidas se calculan en el centro del elemento más cercano a la posición indicada.

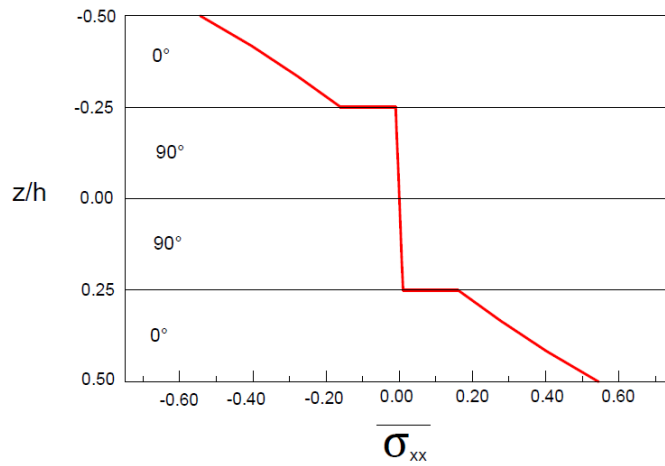


Figura 9: $\overline{\sigma_{xx}}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ para $h/a=0,10$.

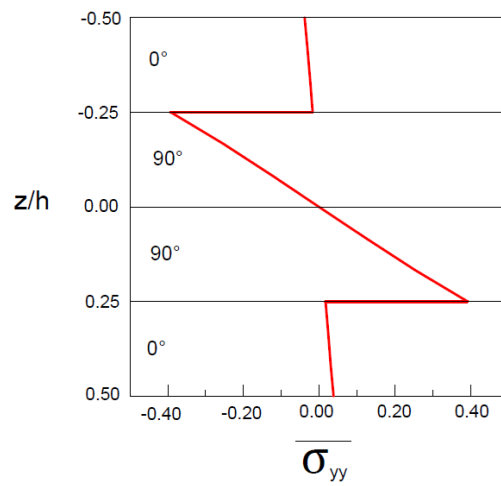


Figura 10: $\overline{\sigma_{yy}}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ para $h/a=0,10$.

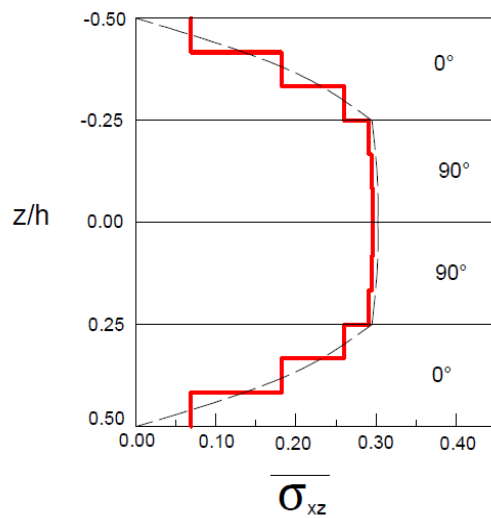


Figura 11: $\overline{\tau_{xz}}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ para $h/a=0,10$.

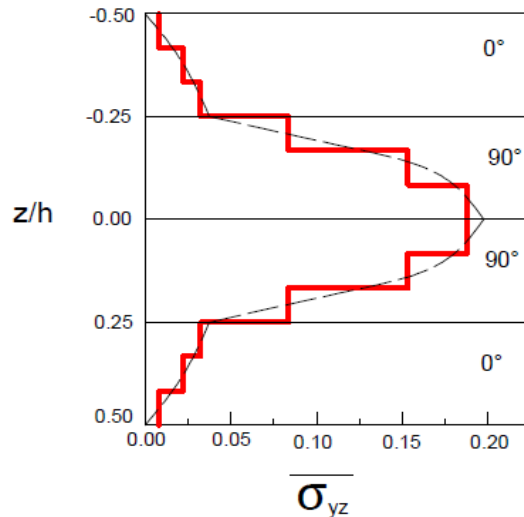


Figura 12: $\bar{\tau}_{yz} \left(\frac{a}{2}, \mathbf{0}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,10$.

6.3 EJEMPLO 3

Se analiza una placa cuadrada laminada tipo «symmetric nine-ply» $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/\bar{0}^\circ)_s$ simplemente apoyada en sus cuatro bordes para tres relaciones espesor/lado diferentes. Las condiciones de borde, el estado de carga y las propiedades del material son iguales a las del primer ejemplo.

Los resultados obtenidos son comparados en la Tabla 4 con la solución de la Elasticidad 3D de Pagano-Hatfield en [7] y la solución de la «Generalized Laminated Plate Theory (GLPT)» de Reddy en [5], [8] y [9] obtenida por los autores Vucksanovic-Cetkovic en [10].

Tabla 4: Deflexión máx. y tensiones adimensionalizadas para una placa cuadrada simplemente apoyada laminada tipo «symmetric nine-ply» $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/\bar{0}^\circ)_s$ ante carga bi-armónica.

h/a	Referencia	Teoría	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xy}$
0,25	Actual		1,8089	0,6542	0,2332	0,2082	-0,0338
	Vucksanovic-Cetkovic [10]	GLPT	1,7971	0,6718	0,2325	0,223	-0,03466
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity		0,684	0,2134	0,223	-0,0337
0,10	Actual		0,6577	0,5367	0,26076	0,2039	-0,02312
	Vucksanovic-Cetkovic [10]	GLPT	0,6576	0,5521	0,26110	0,21181	-0,02375
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity		0,551	0,247	0,226	-0,0235
0,01	Actual		0,4312	0,5236	0,2697	0,1899	-0,02069
	Vucksanovic-Cetkovic [10]	GLPT	0,4335	0,5388	0,2759	0,2015	-0,02131
	Pagano-Hatfield [7]	3D Elasticity		0,539	0,259	0,219	-0,0213

La variación de tensiones a lo largo del espesor para una relación $h/a=0.10$ se representan gráficamente en la Fig. 13 hasta la Fig. 15.

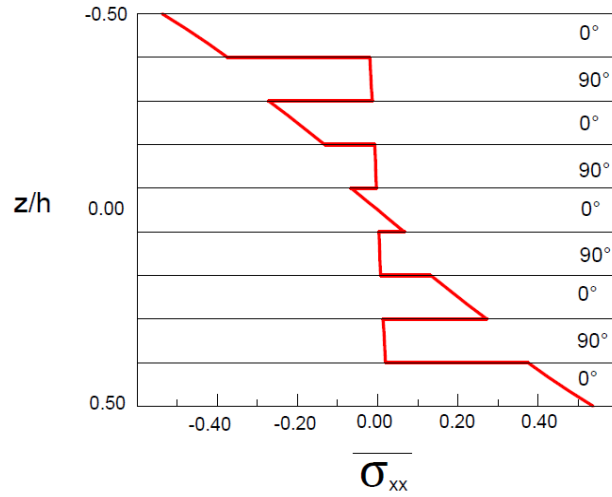


Figura 13: $\bar{\sigma}_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,10$.

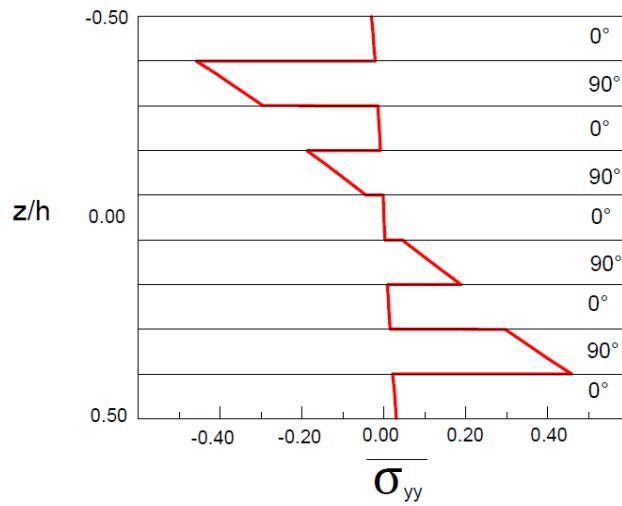


Figura 14: $\bar{\sigma}_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,10$.

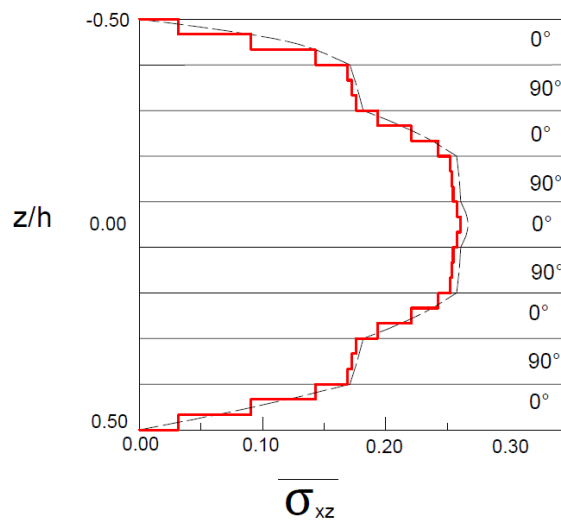


Figura 15: $\bar{\tau}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,10$.

6.4 EJEMPLO 4

Se analiza una placa cuadrada laminada tipo «unsymmetric cross-ply» ($0^\circ/90^\circ$) simplemente apoyada en sus cuatro bordes con una relación espesor/lado igual a 0,10. Las condiciones de borde, las propiedades del material y el estado de cargas son similares a los del problema 1.

Al igual que en los ejemplos anteriores, debido a la simetría, sólo se modeló un cuarto de la placa y se empleó una malla de 6x6. El espesor se discretizó en 8 capas de igual espesor (4 por cada lámina).

Los valores obtenidos se presentan y se comparan por los logrados por Kant-Pandya en ^[11], Pagano en ^[6] y Ren en ^[12] en la Tabla 5.

Tabla 5: Deflexión máxima y tensiones adimensionalizadas para una placa cuadrada simplemente apoyada laminada tipo «unsymmetric cross-ply» ($0^\circ/90^\circ$) bajo una carga bi-armónica para una relación $h/a=0,10$.

h/a	Referencia	z/h	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}^2$	\bar{w}
0,10	Actual	-0,50	-0,7111	0,0523	0,3330	1,2247
		0,50	0,0842	-0,0523		
	Kant-Pandya [11]	-0,50	-0,7593	0,0537	0,3267	1,2124
		0,50	0,0855	-0,0537		
	Pagano [5]	-0,50	-0,7300	0,0538	0,3310	-
		0,50	0,0890	-0,0536		
	Ren [12]	-0,50	-0,734	0,0540	0,3320	-
		0,50	0,0870	-0,0540		

La variación de tensiones a lo largo del espesor se representa gráficamente en las Fig. 16 y Fig. 17.

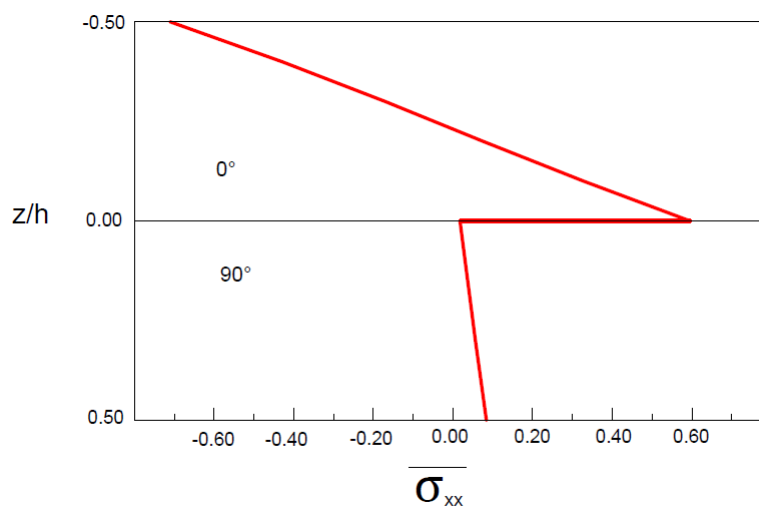


Figura 16: $\bar{\sigma}_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,10$.

² Se calcula para el punto $(0, b/2, -0,20)$.

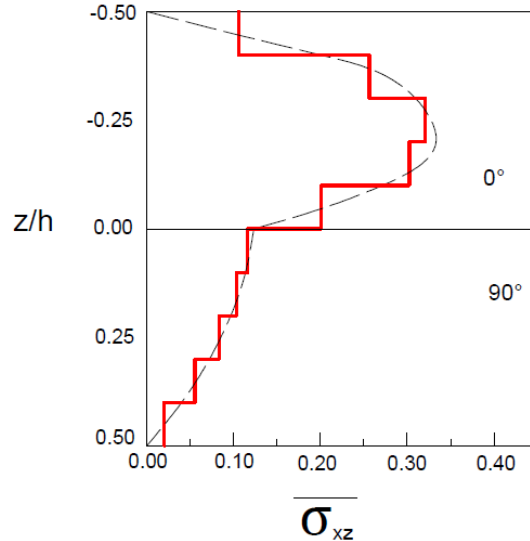


Figura 17: $\bar{\tau}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,10$.

6.5 EJEMPLO 5

El objetivo de este ejemplo es analizar la capacidad del presente modelo para computar los esfuerzos normales transversales al plano de la placa. Se considera el mismo caso del primer ejemplo, con una relación espesor/lado igual a 0,25.

Sólo se modeló un cuarto de la placa y se empleó una malla de 6x6. El espesor se discretizó en 12 capas de iguales.

Los valores obtenidos se presentan graficados en la Fig. 18, en donde son comparados con los obtenidos por Pagano a través de la Elasticidad 3D.

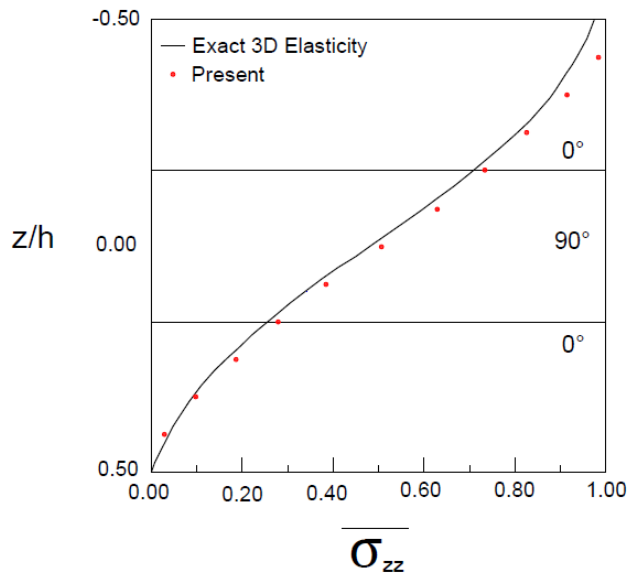


Figura 18: $\bar{\sigma}_{zz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,25$.

Adicionalmente, se exhibe en la Fig. 19 el alabeo de la sección, el cual no es tenido en cuenta en teorías que mantienen las secciones planas como la « Classical Laminated Plate Theory (CLPT) » y la « First order Shear Deformation Theory (FSDT) ».

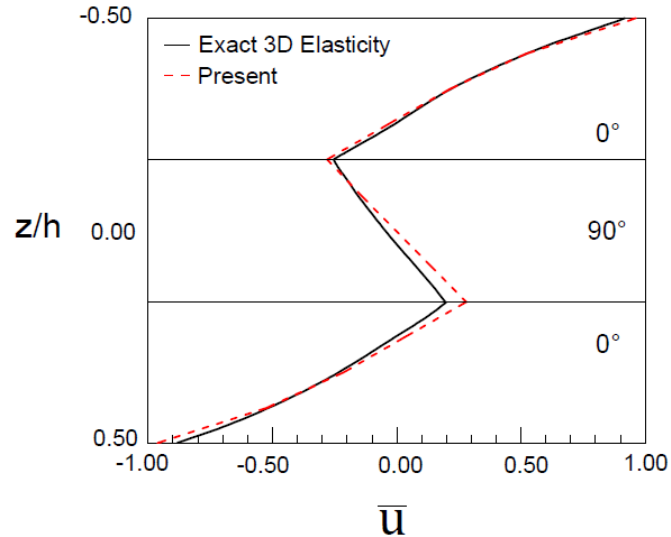


Figura 19: $\bar{u} \left(\mathbf{0}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right)$ para $h/a=0,25$.

7. CONCLUSIONES

Un eficiente modelo de elementos finitos mixtos es presentado para el análisis de laminados compuestos. Su precisión es demostrada a lo largo de una serie de ejemplos donde se obtuvieron resultados satisfactorios y semejantes a los hallados por la solución de la Elasticidad.

El uso de multiplicadores de Lagrange presenta como principal ventaja la posibilidad de modelar cada capa independientemente de las demás, resultando un modelo computacional fácil de construir. Esto permite, además, elegir para cada capa la formulación adecuada según el problema. Como contrapartida, se genera una matriz de rigidez simétrica no definida positiva y de gran tamaño, lo cual se resuelve cómodamente mediante la reducción de la matriz.

Por último, es importante destacar la posibilidad de suprimir los multiplicadores de Lagrange en una parte del modelo, simulando la delaminación entre capas de forma sencilla sin variar nada más en la formulación.

8. REFERENCIAS

- [1] Alliney S. and Carnicer R. S., "A hybrid finite element model for multilayered plates", *Computacional Mechanics*, Volume 10, Number 5 (1992), 319-333.
- [2] Singh, S.K., Chakrabarti, A., Bera, P., and Sony, J.S.D., "An efficient C0 FE model for the analysis of composites and sandwich laminates with general layup", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8(2011) 197 – 212.
- [3] Chakrabarti, A. and Sheikh, A.H., "A new plate bending element based on higher order shear deformation theory for the analysis of composite plates". *Fin. Elem. Anal. Des.*, 39(9):883–903, 2003.
- [4] Chakrabarti, A. and Sheikh, A.H., "Analysis of laminated sandwich plates based on interlaminar shear stress continuous plate theory". *J. Eng. Mech. ASCE*, 131(4):377–384, 2005.
- [5] Reddy, J. N., "Mechanics of Composite Plates and Shells", CRC Press, 689-895, 1997.
- [6] Pagano, N. J. and Hatfield, S. J., "Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites," *AIAA Journal*, 10, 931-933 .(1972).
- [7] Pagano, N. J. and Hatfield, S. J., "Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites," *AIAA Journal*, 10, 931-933 .(1972).
- [8] Reddy, J. N., "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 3, 173.180 (1987).
- [9] Reddy, J. N., Barbero, E. J., and Teply, J. L., "A Plate Bending Element Based on a Generalized Laminated Plate Theory", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp. 1-14.
- [10] Vuksanovic, D. and Cetkovic, M., "Analytical solution for multilayer plates using general layerwise plate theory", *Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering* Vol. 3, N°2, 2005,pp 121-136.
- [11] Kant, T. and Pandya, B.N., "A simple Finite Element Formulation of a Higher-order Theory for Unsymmetrically Laminated Composite Plates", *Composite Structures*, 9(1988)215-246.
- [12] Ren, J. G., "A new theory of laminated plate", *Comp. Science and Technology*, 26 (1986) 225-39.